

Об индексе дефекта векторного оператора Штурма–Лиувилля¹

К.А.Мирзоев, Т.А. Сафонова²

1. Введение. Предварительные сведения

1.1. Пусть $R_+ := [0, +\infty)$ и пусть матриц-функции P, Q и R порядка n ($n \in \mathcal{N}$), определённые на полуоси R_+ , таковы, что $P(x)$ - невырожденная, $P(x)$ и $Q(x)$ - эрмитовы матрицы при $x \in R_+$, а элементы матриц-функций P^{-1} , Q и R измеримы на R_+ и суммируемы на каждом её замкнутом конечном подынтервале. Определим первую квазипроизводную заданной локально абсолютно непрерывной вектор-функции $f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^t$ (здесь и далее везде, t - символ транспонирования), полагая $f^{[1]} := P(f' - Rf)$. Предположим, что функция $f^{[1]}$ также локально абсолютно непрерывна, и определим вторую квазипроизводную $f^{[2]}$, полагая $f^{[2]} := (f^{[1]})' + R^* f^{[1]} - Qf$, где $*$ - символ сопряжения, и квазидифференциальное выражение, полагая $l[f](x) := -f^{[2]}(x)$. Таким образом,

$$l[f] = -(P(f' - Rf))' - R^* P(f' - Rf) + Qf, \quad (1)$$

а область определения Δ выражения $l[f]$ — это множество всех комплекснозначных вектор-функций f , таких что f и $f^{[1]}$ локально абсолютно непрерывны на R_+ и при $f \in \Delta$ выражение $l[f]$ ($\in \mathcal{L}_{loc}^1(R_+)$) определяется п.в. по формуле (1). Кроме того, для любых двух вектор-функций $f, g \in \Delta$ справедлива следующая лемма - векторный аналог тождества Грина:

Лемма 1. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ - матриц-функции порядка n , удовлетворяющие перечисленным выше условиям. Тогда для любых двух вектор-функций $u, v \in \Delta$ и для любых двух чисел α и β таких, что $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$, справедлива формула

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{ (l[u](x), v(x)) - (u(x), l[v](x)) \} dx = [u(x), v(x)](\beta) - [u(x), v(x)](\alpha), \quad (2)$$

где $(g, h) = \sum_{s=1}^n g_s \overline{h_s}$ - скалярное произведение векторов g и h , а форма $[u, v]$ определяется равенством $[u, v](x) := (u^{[1]}(x), v(x)) - (u(x), v^{[1]}(x))$.

Пусть далее $\mathcal{L}_n^2(R_+)$ - пространство классов эквивалентности всех комплекснозначных измеримых вектор-функций f , у которых сумма квадратов модулей компонент интегрируема по Лебегу на R_+ . В литературе, посвященной спектральной

¹Работа будет опубликована в феврале 2016 г. в журнале "Математические заметки" (том 99, вып.2).

²Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-11-00754). Второй автор поддержан Минобрнауки РФ (грант Президента РФ № МК-3941.2015.1), РФФИ (гранты №№ 14-01-31136-мол а, 14-01-00349, 15-31-50259) и фондом содействия отечественной науки.

теории обыкновенных дифференциальных операторов, хорошо известна процедура, с помощью которой определяются минимальный и максимальный операторы L_0 и L_1 соответственно, порожденные выражением $l[f]$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_n^2(R_+)$. Операторы L_0 , L_1 и операторы, связанные с ними, называются векторными операторами Штурма – Лиувилля. Используя формулу (2), можно доказать, что оператор L_0 является замкнутым симметрическим оператором. Кроме того, область определения оператора L_0 всюду плотна в $\mathcal{L}_n^2(R_+)$. Пусть пара (d_+, d_-) - индекс дефекта оператора L_0 . Согласно [1]-[2], дефектные числа d_+ и d_- оператора L_0 совпадают с максимальным числом линейно независимых решений уравнения

$$l[f] = \lambda f, \quad (3)$$

принадлежащих пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$, когда параметр λ берётся из верхней ($\Im \lambda > 0$) или нижней ($\Im \lambda < 0$) полуплоскости соответственно, удовлетворяют неравенствам $n \leq d_+, d_- \leq 2n$ и, кроме того, $d_+ = 2n$ тогда и только тогда, когда $d_- = 2n$. Случай $d_+ = d_- = 2n$ реализуется тогда и только тогда, когда все решения уравнения (3) при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежат пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$. Используя аналогию со спектральной теорией скалярных операторов Штурма-Лиувилля на полуоси, иногда говорят, что для выражения $l[f]$ (оператора L_0) имеет место случай предельной точки, если $d_+ = d_- = n$, если же $d_+ = d_- = 2n$, то говорят, что для выражения $l[f]$ имеет место случай предельного круга (см., напр., [2]).

Уравнение (3) равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = (F - \Lambda)Y, \quad (4)$$

где $Y = (f, f^{[1]})^t$, матрицы F и Λ порядка $2n$ имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} R & P^{-1} \\ Q & -R^* \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} O & O \\ \lambda I & O \end{pmatrix},$$

а O и I , как обычно, - нулевая и единичная матрицы порядка n соответственно. Равносильность этих уравнений понимается в том смысле, что если n -компонентная вектор-функция f является решением (3), то $2n$ -компонентная вектор-функция $Y = (f, f^{[1]})^t$ является решением системы (4) и наоборот, если Y - решение этой системы, то вектор-функция f , составленная из его первых n -компонент, - решение системы уравнений (3).

Заметим, что условия на элементы матриц P , Q и R , перечисленные выше, обеспечивают для системы (4) справедливость теоремы существования и единственности решения задачи Коши, поставленной в произвольной точке R_+ .

Используя терминологию из теории линейных квазидифференциальных уравнений, говорят, что квазипроизводные $f^{[0]}(:= f)$, $f^{[1]}$ и $f^{[2]}$ порождены матрицей F .

Важным в спектральной теории операторов Штурма-Лиувилля является вопрос об определении дефектных чисел оператора L_0 при данных матриц-функциях P , Q и R , в частности, перечисление условий на эти матриц-функции, которые обеспечивают реализацию заданной пары (d_+, d_-) . Начиная с работы В.Б. Лидского [3] этот вопрос для операторов, порождённых выражением вида $-(Pf')' + Qf$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - эрмитовы матрицы порядка n таковы, что элементы матриц $P^{-1}(x)$, $Q(x)$ локально интегрируемы на R_+ , находится в центре внимания многих математиков (см. работы [2]-[7] и списки цитированной в них литературы).

С другой стороны, класс операторов, порождённых выражением (1), намного шире и, в частности, охватывает часто встречающиеся в математической физике операторы, порождённые некоторыми дифференциальными выражениями с коэффициентами-распределениями (см. ниже, п. 1.2). Основная цель настоящей работы — изучение вопроса об индексе дефекта оператора L_0 , порождённого выражением $l[f]$, в терминах матриц-функций P , Q и R . Различные аспекты этого вопроса обсуждались также в работах [8]-[10].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы дефектные числа оператора L_0 были не максимальны, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset R_+$, $k = 1, 2, \dots$, выполнялось условие*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \right)^{1/2} = \infty, \quad (5)$$

где $K(x, t)$ — функция Коши уравнения $l[f] = 0$, т.е. решение этого уравнения по переменной x , удовлетворяющее начальным условиям $K(x, t)|_{x=t} = O$, $K^{[1]}(x, t)|_{x=t} = I$, а символ $\|\cdot\|$ — означает самосопряжённую матричную норму.

Справедливость теоремы, аналогичной теореме 1, для случая скалярных дифференциальных операторов любого порядка и весовых пространств \mathcal{L}_w^p ($1 \leq p < +\infty$) установлена в [11]. Позже подробное доказательство этой теоремы для случая скалярных дифференциальных операторов второго порядка и пространств \mathcal{L}_w^2 было приведено в [12]. Там же и в [13] для случая $n = 1$ приведены некоторые следствия теоремы 1. Кроме того, достаточность условия (5) для не максимальности дефектных чисел оператора L_0 , порождённого выражением вида $-(Pf')' + Qf$ (см. выше), используется в работе [6]. Однако, полное доказательство теоремы 1 нигде не опубликовано. Мы в данной работе устраним этот пробел и приводим его в начале параграфа 2.

1.2. Пусть P_0, Q_0 и P_1 — эрмитовы матриц-функции порядка n с измеримыми по Лебегу элементами такие, что P_0^{-1} — существует и $\|P_0^{-1}\|, \|P_0^{-1}\| \|P_1\|^2, \|P_0^{-1}\| \|Q_0\|^2$ локально интегрируемы по Лебегу. Пусть $\varphi := P_1 + iQ_0$ и $\varphi^* := P_1 - iQ_0$. Рассмотрим матрицу

$$F = \begin{pmatrix} P_0^{-1}\varphi & P_0^{-1} \\ -\varphi^*P_0^{-1}\varphi & -\varphi^*P_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Используя свойства матричных норм, эрмитовость матриц-функций P_0, Q_0 и P_1 и неравенство Коши-Буняковского, легко заключить, что для любого $[\alpha, \beta] \subset R_+$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \|\varphi^*P_0^{-1}\| &= \int_{\alpha}^{\beta} \|P_0^{-1}\varphi\| \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\|P_0^{-1}\|} \cdot \sqrt{\|P_0^{-1}\|} \|\varphi\| \\ &\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} \|P_0^{-1}\| \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\alpha}^{\beta} \|P_0^{-1}\| \cdot \|\varphi\|^2 \right)^{1/2} < +\infty \end{aligned}$$

и

$$\int_{\alpha}^{\beta} \|\varphi^*P_0^{-1}\varphi\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|P_0^{-1}\| \cdot \|\varphi\|^2 < +\infty.$$

Таким образом, элементы всех блоков матрицы F принадлежат пространству $L_{loc}^1(R_+)$.

Посредством матрицы F определим квазипроизводные $f^{[0]}, f^{[1]}, f^{[2]}$, полагая, как и ранее,

$$f^{[0]} = f, \quad f^{[1]} = P_0 f' - \varphi f, \quad f^{[2]} = (f^{[1]})' + \varphi^* P_0^{-1} f^{[1]} + \varphi^* P_0^{-1} \varphi f.$$

Далее, применяя замечание, сделанное в п. 1.1., заключаем, что для уравнения

$$-f^{[2]} = \lambda f$$

справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши, поставленная в произвольной точке R_+ . Кроме того, можно показать, что условия, перечисленные выше на функции $\|P_0^{-1}\|, \|Q_0\|$ и $\|P_1\|$, являются самыми общими условиями, обеспечивающими это (см. [14], Ch. 1, Th. 1.2.3).

Если предположить, что элементы матрицы P_0 также принадлежат $\mathcal{L}_{loc}^1(R_+)$, то легко заметить, что и элементы матрицы φ будут локально интегрируемы на R_+ . Из этих предположений можно заключить, что если $'$ трактовать как операцию взятия производной в смысле теории распределений, то в выражении $f^{[2]}$ можно раскрыть все скобки, и для него получим формулу

$$f^{[2]} = (P_0 f')' - i((Q_0 f)' + Q_0 f') - P_1' f.$$

Особо отметим, что в этом равенстве координаты вектор-функций $(P_0 f')'$, $(Q_0 f)'$ и $P_1' f$ являются сингулярными обобщёнными функциями, причём координаты первых двух из них — производные в смысле теории распределений регулярных обобщённых функций, а координаты вектор-функций $Q_0 f'$ и $f^{[2]}$ — регулярные обобщённые функции. Таким образом, выражение $l[f]$ (см. (1)) в терминах обобщённых функций формально записывается в виде

$$l[f] = -(P_0 f')' + i((Q_0 f)' + Q_0 f') + P_1' f. \quad (6)$$

В частности, если $P(x) = I$, $R(x) = \sigma(x)$ и $Q(x) = -\sigma^2(x)$, где $\sigma(x)$ — вещественнозначная, симметрическая матриц-функция порядка n такова, что элементы матрицы $\sigma^2(x)$ локально интегрируемы на R_+ , то векторное квазидифференциальное выражение (6) примет вид

$$l[f] = -f'' + \sigma' f. \quad (7)$$

Подробный анализ билинейной формы из формулы (2) позволяет установить справедливость следующей теоремы (см., напр., [8] и [9]).

Теорема 2. Пусть существует последовательность попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset R_+$ ($k = 1, 2, \dots$) такая, что элементы матрицы σ абсолютно непрерывны на $[a_k, b_k]$ и $\sigma'(x) \geq 0$ п.в. при $x \in [a_k, b_k]$, и пусть выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k)^2 = +\infty.$$

Тогда для выражения $l[f]$ (оператора L_0) имеет место случай предельной точки.

Истоки этой теоремы восходят к Ф. Хартману, Р.С. Исмагилову, Ф. Аткинсону и М.С.П. Истхему. В векторном случае при условии, что элементы матрицы $\sigma'(x)$ из $L_{loc}^1(R_+)$, аналогичная теорема была доказана В.П. Серебряковым (см., напр. [5]).

Пусть теперь x_k ($k = 1, 2, \dots$) — возрастающая последовательность положительных чисел, $x_0 = 0$ и $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$. Если при этом в выражении (7) положить $\sigma(x) = C_k$ при $x \in [x_{k-1}, x_k)$, где C_k — вещественная симметрическая числовая матрица, то это выражение принимает вид

$$l[f] = -f'' + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{H}_k \delta(x - x_k) f, \quad (8)$$

где $\mathcal{H}_k = C_{k+1} - C_k$, а $\delta(x)$ — δ -функция Дирака. Таким образом, теория операторов, порожденных выражениями вида (8), включается в теорию операторов, порождённых векторными квазидифференциальными выражениями второго порядка.

Пусть l_n^2 - гильбертово пространство бесконечных последовательностей n -компонентных вектор-столбцов со стандартным скалярным произведением. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для выражения $l[f]$ (см. (8)) имеет место случай предельного круга в том и только в том случае, когда все решения разностного векторного уравнения*

$$-\frac{Z_{k+1}}{r_{k+1}r_{k+2}d_{k+1}} + \frac{1}{r_{k+1}^2}[\mathcal{H}_k + (\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}})I]Z_k - \frac{Z_{k-1}}{r_k r_{k+1} d_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

принадлежат пространству l_n^2 , где $d_k = x_k - x_{k-1}$, $r_{k+1} = \sqrt{d_k + d_{k+1}}$.

Эта теорема принадлежит авторам (см., напр., [8] и [9]) и является обобщением одной теоремы, полученной М.М. Маламудом и А.С. Костенко для случая $n = 1$ (см. [15] и [16]).

1.3. В связи с теоремой 3 нам понадобятся следующие сведения из теории операторов, порождённых разностными выражениями второго порядка в гильбертовом пространстве l_n^2 , приведённые, например, в [17].

Пусть A_j, B_j ($j = 0, 1, \dots$) - квадратные матрицы порядка n , причём B_j^{-1} существуют, а A_j - самосопряжены. Рассмотрим векторное разностное выражение второго порядка

$$(lu)_j = B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $u_0, u_1, \dots \in C^n$, и обобщённую якобиеву матрицу

$$J = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & O & O & \dots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & O & \dots \\ O & B_1^* & A_2 & B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Выражение (9) и граничные условия $A_0 u_0 + B_0 u_1 = 0$ определяют в пространстве l_n^2 минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 с всюду плотной областью определения и индексом дефекта (d_+, d_-) ($0 \leq d_+, d_- \leq n$ и если одно из них равно n , то и другое такое же). Согласно терминологии, принятой в матричной проблеме моментов, говорят, что оператор L_0 порождён матрицей J . Кроме того, если $d_+ = d_- = 0$, то говорят, что для оператора L_0 имеет место определённый, а если $d_+ = d_- = n$, то вполне неопределённый случаи (при $n = 1$ слово "вполне" опускают). Определённый случай соответствует случаю предельной точки, а вполне неопределённый - случаю предельного круга для оператора Штурма-Лиувилля.

Теорема 3 утверждает, что дефектное число оператора L_0 , порождённого выражением (8) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_n^2(R_+)$, равно $2n$ в том и только том случае,

когда для матрицы J имеет место вполне неопределённый случай, где элементы этой матрицы определяются формулами

$$A_k = \frac{1}{r_{k+1}^2} [\mathcal{H}_k + (\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}})I], \quad B_k = -\frac{1}{r_{k+1}r_{k+2}d_{k+1}}I, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

а A_0, B_0 - произвольные вещественные симметрические матрицы порядка n такие, что B_0^{-1} существует.

Имеет место следующая теорема - аналог теоремы 1 для операторов, порождённых обобщёнными якобиевыми матрицами.

Теорема 4. *Для того, чтобы для оператора L_0 имел место вполне неопределённый случай, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности отрезков натуральных чисел $[n_k, m_k]$ таких, что $m_k \leq n_{k+1} \leq m_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$), выполнялось условие*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=n_k}^{m_k} \sum_{j=n_k}^i \|K_{ij}\|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

где K_{ij} - решение разностного уравнения $(lu)_j = 0$ с начальными условиями $K_{jj} = O$ и $K_{j+1,j} = B_j^{-1}$ ($i, j = 1, 2, \dots$).

В работах [18]-[20] обсуждаются вопросы, связанные с индексами дефекта операторов, порождённых обобщёнными якобиевыми матрицами, в частности, в [18] установлена справедливость теоремы 4.

2. Теоремы о не максимальности и минимальности дефектных чисел

2.1. Доказательство теоремы 1. Пусть квадратные матриц-функции Φ и Ψ порядка n являются матричными решениями уравнения $l[f] = 0$, удовлетворяющими начальным условиям $\Phi(0) = \Psi^{[1]}(0) = I$ и $\Phi^{[1]}(0) = \Psi(0) = O$. Сначала покажем, что матриц-функции $K(x, t)$, $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ связаны соотношением

$$K(x, t) = \Psi(x)\Phi^*(t) - \Phi(x)\Psi^*(t). \quad (11)$$

Действительно, из определения матриц-функций Φ и Ψ легко извлечь, что вектор-столбцы матрицы

$$T = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \Phi^{[1]} & \Psi^{[1]} \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (4) при $\lambda = 0$. Кроме того, легко установить, что

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi^{*[1]} & -\Psi^* \\ -\Phi^{*[1]} & \Phi^* \end{pmatrix}$$

(см. замечание 1 из [9]).

Пусть матриц-функция F определена в формуле (4) и вектор-функция $H := (0, h)^t$, где h - n -компонентный вектор-столбец с локально интегрируемыми координатами. Применяя метод вариации постоянных к неоднородной системе дифференциальных уравнений первого порядка $Y' = FY + H$, получим, что общее решение этой системы имеет вид

$$Y = T(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_{x_0}^x T(x)T^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} dt,$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные n -компонентные вектор-столбцы, т.е. функция Коши этой системы равна $T(x) \cdot T^{-1}(t)$. Из последнего равенства заключаем, что для общего решения уравнения $l[f] = h$ справедлива равенство

$$f = \Phi C_1 + \Psi C_2 + \int_{x_0}^x \{\Psi(x)\Phi^*(t) - \Phi(x)\Psi^*(t)\}h(t)dt,$$

т.е. для $K(x, t)$ справедливо равенство (11). При этом справедливость соотношений $K(x, t)|_{x=t} = O$ и $K^{[1]}(x, t)|_{x=t} = I$ немедленно следует из представления матриц-функции T и равенства $T(x)T^{-1}(x) = I$ (здесь I - единичная матрица порядка $2n$).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из формулы (11) и из самосопряжённости матричной нормы следует, что

$$\|K(x, t)\| \leq \|\Psi(x)\| \|\Phi(t)\| + \|\Phi(x)\| \|\Psi(t)\|.$$

Записав правую часть этого неравенства в виде скалярного произведения двумерных векторов $(\|\Psi(x)\|, \|\Phi(x)\|)$ и $(\|\Phi(t)\|, \|\Psi(t)\|)$ и применяя неравенство Коши-Буняковского, находим, что

$$\|K(x, t)\|^2 \leq (\|\Phi(x)\|^2 + \|\Psi(x)\|^2)(\|\Phi(t)\|^2 + \|\Psi(t)\|^2).$$

Интегрируя последнее неравенство по t в пределах от a до x , а затем по x в пределах от a до b , где $0 \leq a \leq b < +\infty$, после элементарных вычислений находим, что

$$\int_a^b (\|\Phi(x)\|^2 + \|\Psi(x)\|^2) dx \geq \sqrt{2} \left\{ \int_a^b dx \int_a^x \|K(x, t)\|^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (12)$$

Пусть теперь $(a_k, b_k) \subset R_+$ - последовательность непересекающихся интервалов, удовлетворяющая условию (5). Применяя неравенство

$$\int_0^{+\infty} (\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} (\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2),$$

а затем неравенство (12) к каждому слагаемому из суммы, стоящей в правой части, и равенство (5), находим, что

$$\int_0^{+\infty} (||\Phi||^2 + ||\Psi||^2) = +\infty. \quad (13)$$

Таким образом, либо матриц-функция Φ , либо Ψ содержит вектор-столбец, не принадлежащий пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$, т.е. при некотором λ (а именно при $\lambda = 0$) не все решения уравнения (3) принадлежат этому пространству. Следовательно, дефектные числа оператора L_0 не максимальны (см. п. 1.1). Достаточность доказана.

Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга, т.е. выполняется равенство (13). Покажем, что тогда для любого $a \in R_+$ выполняется равенство

$$\int_a^{+\infty} dx \int_a^x ||K(x, t)||^2 dt = +\infty. \quad (14)$$

Допустим, что это не так, т.е. для некоторого $a_0 \in R_+$

$$J := \int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{a_0}^x ||K(x, t)||^2 dt < +\infty.$$

Применяя равенство (11), заметим, что тогда

$$\int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{a_0}^{+\infty} ||K(x, t)||^2 dt = 2J < +\infty.$$

Следовательно, согласно теореме Фубини, каждый столбец матриц-функции $K(\cdot, t)$ для п.в. $t \geq a_0$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$. Теперь заметим, что, во-первых, существуют числа t_1^0 и t_2^0 ($> a_0$), такие что

$$\det \begin{pmatrix} \Phi(t_1) & \Psi(t_1) \\ \Phi(t_2) & \Psi(t_2) \end{pmatrix} \neq 0$$

при $t_1 = t_1^0$ и $t_2 = t_2^0$, поскольку противоположное допущение приводит к противоречивому равенству $\det T(t_1^0) = 0$ при некотором $t_1^0 > a_0$, а, во-вторых, в силу непрерывности матриц-функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ при некотором $\delta > 0$ это неравенство справедливо при всех $t_1 \in (t_1^0 - \delta, t_1^0 + \delta)$ и $t_2 \in (t_2^0 - \delta, t_2^0 + \delta)$. Таким образом, существуют числа t_1^1 и t_2^1 из соответствующих интервалов такие, что каждый столбец матриц-функции $K(\cdot, t_i^1)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$ при $i = 1, 2$. Кроме того, вектор-столбцы матриц-функции $K(\cdot, t_1^1)$ и $K(\cdot, t_2^1)$ линейно независимы. Действительно, из равенства

$$K(x, t_1^1)\alpha + K(x, t_2^1)\beta = 0,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$, формулы (11) и начальных условий $\Phi(0) = \Psi^{[1]}(0) = I$ и $\Phi^{[1]}(0) = \Psi(0) = O$ следует, что вектора α и β удовлетворяют однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \Phi^*(t_1^1)\alpha + \Phi^*(t_2^1)\beta = 0 \\ \Psi^*(t_1^1)\alpha + \Psi^*(t_2^1)\beta = 0 \end{cases},$$

определитель которой отличен от 0. Следовательно, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$.

Таким образом, все решения уравнения (3) при $\lambda = 0$ принадлежат пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$, а это противоречит условию (13). Равенство (14) доказано. Остаётся заметить, что если выполняется это равенство, то можно найти последовательность непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset R_+$, $k = 1, 2, \dots$, например, таких, что

$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \geq 1,$$

а для этой последовательности интервалов равенство (5), очевидно, выполняется. Теорема 1 доказана.

Пусть $(a_k, b_k) \subset R_+$ ($k = 1, 2, \dots$) - последовательность непересекающихся интервалов. Заметим что, как известно, при фиксированном k в треугольнике $\{(x, t) | a_k < t \leq x < b_k\}$ функция $K(x, t)$ однозначно определяется значениями коэффициентов выражения l . Таким образом, если выполняется условие (5), то независимо от значений этих функций вне множества $U_{k=1}^{+\infty}[a_k, b_k]$ для выражения l не реализуется случай предельного круга, требуется лишь, чтобы матриц-функции $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ на R_+ удовлетворяли условиям, перечисленным в п.1.1. В дальнейшем мы воспользуемся этим замечанием.

2.2. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть a, b и c - положительные числа, такие что $a < c < b$, H - произвольная вещественная симметрическая матрица порядка n и пусть $K(x, t) = (k_{ij}(x, t))_{i,j=1}^n$ - функция Коши векторного квазидифференциального уравнения

$$-y'' + H\delta(x - c)y = 0. \quad (15)$$

Тогда

$$\int_a^b dx \int_a^x |k_{ii}(x, t)|^2 dt \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}(\rho s)^2(\rho + s) \left| h_{ii} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right) \right|$$

и

$$\int_a^b dx \int_a^x |k_{ij}(x, t)|^2 dt = \frac{|h_{ij}|^2}{9} (\rho s)^3, \text{ если } i \neq j,$$

где $\rho = c - a$ и $s = b - c$.

Доказательство. В определении квазидифференциального выражения $l[f]$ по формуле (7) положим

$$\sigma(x) = \begin{cases} O, & \text{если } a \leq x < c \\ H, & \text{если } c \leq x \leq b \end{cases}.$$

Тогда уравнение $l[f] = 0$ примет вид (15). Пусть $t \in [a, b]$ фиксировано. Функция $K(x, t)$ удовлетворяет уравнению (15) при $x > t$ и начальным условиям $K(x, t)|_{x=t} = O$ и $K^{[1]}(x, t)|_{x=t} = I$. Из этого легко вывести, что

$$K(x, t) = (x - t)I$$

при $t \in [a, c]$, $x \in [t, c]$ или при $t \in [c, b]$, $x \in [t, b]$.

Пусть теперь $t \in (a, c)$ и $x \in (c, b)$. Тогда $K(x, t) = C_1(t) + xC_2(t)$ при $x \in (c, b]$, где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ - матриц-функции порядка n , и, следовательно,

$$K(c + 0, t) = C_1(t) + cC_2(t) \text{ и } K^{[1]}(c + 0, t) = C_2(t) - H(C_1(t) + cC_2(t)).$$

С другой стороны,

$$K(c - 0, t) = (c - t)I \text{ и } K^{[1]}(c - 0, t) = I.$$

Используя далее условия непрерывности функций $K(x, t)$ и $K^{[1]}(x, t)$ в точке $x = c$, получаем, что $C_1(t)$ и $C_2(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} C_1(t) + cC_2(t) = (c - t)I \\ C_2(t) - H(C_1(t) + cC_2(t)) = I \end{cases}.$$

Таким образом, $C_1(t) = -tI - (c - t)cH$ и $C_2(t) = I + (c - t)H$, и, следовательно,

$$K(x, t) = (x - t)I + (c - t)(x - c)H$$

при $t \in [a, c]$, $x \in [c, b]$.

Из полученных формул для $K(x, t)$ следует, что при $1 \leq i \leq n$

$$J_{ii} := \int_a^b dx \int_a^x |k_{ii}(x, t)|^2 dt =: J_1 + 2h_{ii}J_2 + h_{ii}^2J_3,$$

где вычисления показывают, что

$$J_1 = \frac{1}{12}(b-a)^4, \quad J_2 = \frac{1}{6}(b-c)^2(c-a)^2(b-a), \quad J_3 = \frac{1}{9}(b-c)^3(c-a)^3.$$

Таким образом,

$$J_{ii} = \frac{h_{ii}^2}{9}(\rho s)^3 + \frac{h_{ii}}{3}(\rho s)^2(\rho + s) + \frac{1}{12}(\rho + s)^4.$$

Записав интеграл J_{ii} в виде

$$J_{ii} = (\rho s)^3 \left[\left[\frac{h_{ii}}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right) \right]^2 + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right)^2 \left[\frac{1}{12} \rho s \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \right],$$

заметим, что

$$\frac{1}{12} \rho s \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right)^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{12}.$$

Поэтому

$$J_{ii} \geq (\rho s)^3 \left[\left[\frac{h_{ii}}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right) \right]^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right)^2 \right].$$

Применив ещё раз неравенство между арифметическим и геометрическим средними, окончательно находим, что справедливо первое утверждение леммы 2.

Кроме того, как мы уже показали выше, элемент $k_{ij}(x, t)$ матриц-функции $K(x, t)$ при $1 \leq i \neq j \leq n$ определяется равенством $k_{ij}(x, t) = (c - t)(x - c)h_{ij}$. Поэтому

$$\int_a^b dx \int_a^x |k_{ij}(x, t)|^2 dt = \frac{|h_{ij}|^2}{9} (\rho s)^3.$$

Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2, докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть $(a_k, b_k) \subset R_+$ ($k = 1, 2, \dots$) - последовательность попарно непересекающихся интервалов и c_k - последовательность положительных чисел, такая что $a_k < c_k < b_k$, и на каждом отрезке $[a_k, b_k]$ выполнены равенства $P(x) = I$, $R(x) = \sigma(x)$, $Q(x) = -\sigma^2(x)$, где $\sigma(x)$ - кусочно-постоянная матриц-функция порядка n с матрицей скачков $\mathcal{H}_k = (h_{ij}^k)_{i,j=1}^n$ в точке c_k . Пусть далее, числа $\rho_k = c_k - a_k$, $s_k = b_k - c_k$ и матрица \mathcal{H}_k таковы, что выполняется одно из следующих условий

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k s_k \sqrt{\rho_k + s_k} \sqrt{\left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k} \right) \right|} = +\infty \quad (16)$$

хотя бы для одного i , такого что $1 \leq i \leq n$, или

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\rho_k s_k)^{3/2} |h_{ij}^k| = +\infty \quad (17)$$

хотя бы для одной пары (i, j) , такой что $1 \leq i \neq j \leq n$.

Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

Доказательство. Применим лемму 2, положив $a = a_k$, $c = c_k$, $b = b_k$. Тогда

$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x |k_{ii}(x, t)|^2 dt \geq \frac{1}{3\sqrt{3}} (\rho_k s_k)^2 (\rho_k + s_k) \left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k} \right) \right|$$

и

$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x |k_{ij}(x, t)|^2 dt = \frac{|h_{ij}^k|^2}{9} (\rho_k s_k)^3, \text{ если } i \neq j, \quad k = 1, 2, \dots$$

Полагая $\|K(x, t)\|^2 = \sum_{i,j=1}^n |k_{ij}(x, t)|^2$, и при фиксированном $1 \leq i \leq n$ используя неравенство $\|K(x, t)\| \geq |k_{ii}(x, t)|$, получим

$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \geq 3^{-3/2} (\rho_k s_k)^2 (\rho_k + s_k) \left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k} \right) \right|.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого неравенства, а затем суммируя по k , находим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \right)^{1/2} \geq 3^{-3/4} \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k s_k \sqrt{(\rho_k + s_k)} \sqrt{\left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k} \right) \right|}.$$

Рассуждая аналогично с учётом второго утверждения леммы 2, для $1 \leq i \neq j \leq n$ находим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \right)^{1/2} \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} (\rho_k s_k)^{3/2} |h_{ij}^k|.$$

Остается применить теорему 1 с учётом условий (16) и (17). Теорема 5 доказана.

2.3. Приведем некоторые следствия из теоремы 5.

Формулировка теоремы 5, очевидно, упрощается, если предположить, что точки c_k являются серединами отрезков $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots$). В этой ситуации справедливо

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 5, $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k^{5/2} \sqrt{\left| h_{ii}^k + \frac{6}{\rho_k} \right|} = +\infty$$

хотя бы для одного i , такого что $1 \leq i \leq n$, или

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k^3 |h_{ij}^k| = +\infty$$

хотя бы для одной пары (i, j) , такой что $1 \leq i \neq j \leq n$, где $\rho_k = b_k - a_k$.

Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

Применим теорему 5 в ситуации, когда дифференциальное выражение l имеет вид (8). В этом случае в качестве точек c_k ($k = 1, 2, \dots$) выберем точки x_k , а в качестве отрезков $[a_k, b_k]$ — отрезки $[x_k - \frac{d_k}{2}, x_k + \frac{d_{k+1}}{2}]$, где, напомним, что $d_k = x_k - x_{k-1}$ (см. формулировку теоремы 3). Справедливо следующее следствие теоремы 5.

Следствие 2. Пусть дифференциальное выражение $l[f]$ имеет вид (8) и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k d_{k+1} r_{k+1} \sqrt{\left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}} \right) \right|} = +\infty$$

хотя бы для одного i , такого что $1 \leq i \leq n$, или

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (d_k d_{k+1})^{3/2} |h_{ij}^k| = +\infty$$

хотя бы для одной пары (i, j) , такой что $1 \leq i \neq j \leq n$.

Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

2.4. В пп. 2.2, 2.3 настоящего параграфа было продемонстрировано, как из теоремы 1 можно получить признаки не максимальности дефектных чисел для векторных операторов Штурма-Лиувилля, порожденных выражениями вида (1), (7) или (8). Применяя теорему 3, получаем, что из справедливости следствия 2 теоремы 5 следует, что для обобщённой яковиевой матрицы J с элементами вида (10) не реализуется вполне неопределённый случай.

В этом пункте получим признак реализации определенного случая для яковиевых матриц J с элементами вида (10). Здесь же отметим, что, согласно теореме 2, он будет одновременно и признаком реализации случая предельной точки для векторного оператора Штурма-Лиувилля, порожденного выражением вида (8).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть последовательность d_k такова, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2 = +\infty. \quad (18)$$

Тогда для яковиевой матрицы J с элементами, определяемыми равенствами (10), имеет место определенный случай.

Доказательство. Из равенства (10) следует, что $\|B_k\|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} d_{k+1}^2 &\leq \sqrt{d_k + d_{k+1}} \sqrt{d_{k+1} + d_{k+2}} d_{k+1} = r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1} \\ &\leq \frac{1}{2} (r_{k+1}^2 + r_{k+2}^2) d_{k+1} = \frac{1}{2} (d_k d_{k+1} + 2d_{k+1}^2 + d_{k+1} d_{k+2}) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4}(d_k^2 + 6d_{k+1}^2 + d_{k+2}^2).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}d_{k+1}^2 \leq \|B_k\|^{-1} \leq \frac{1}{4\sqrt{n}}(d_k^2 + 6d_{k+1}^2 + d_{k+2}^2).$$

Из этого неравенства и условия (18) теоремы 6 следует, что

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|B_k\|^{-1} = +\infty.$$

Последнее соотношение является условием Карлемана, обеспечивающим реализацию определенного случая для матрицы J (см., напр., [17], гл.VII, §2, п.11, теорема 2.9). Теорема 6 доказана.

Отметим, что, рассуждая также, как в [18], из теоремы 4 можно получить достаточные условия реализации вполне неопределённого и не вполне неопределённого случаев для матрицы J . При $n = 1$ эти признаки будут близки к некоторым результатам работ [15] и [16]. Однако мы здесь этого делать не будем.

3. Заключительные замечания. Примеры

В теоремах 2 и 5 данной работы предполагается, что квазидифференциальное выражение l имеет вид (7) на последовательности непересекающихся интервалов (a_k, b_k) ($k = 1, 2, \dots$), где функция $\sigma(x)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a_k, b_k]$ в случае теоремы 2, и является ступенчатой функцией с одним скачком в случае теоремы 5, и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям при $x \in [a_k, b_k]$, обеспечивающим реализацию случая предельной точки для выражений вида (1) в случае теоремы 2 и не максимальность дефектных чисел - в случае теоремы 5. Таким образом, в этих теоремах допускается, что коэффициенты выражения l могут быть произвольными матриц-функциями вне отрезков $[a_k, b_k]$, требуется лишь выполнение условий, перечисленных в начале п.1.1, т.е. элементы этих матриц-функций должны быть измеримы на R_+ и суммируемы на каждом её замкнутом конечном интервале. В частности, выражение l может иметь вид (6) при соответствующих ограничениях на коэффициенты P_0 , Q_0 и P_1 .

В работе [21] Ш. Крист и Г. Штольц показали, что если $d_j = \frac{1}{j}$ и $\mathcal{H}_j = (-2j - 1)I$ ($j = 1, 2, \dots$), то для выражения l вида (8) при $n = 1$ реализуется случай предельного круга и, по-видимому, впервые обнаружили, что для этого выражения такое возможно. Позже в работах [15], [16] А.С. Костенко и М.М. Маламуда и в работе [22] Н.Н. Конечной были построены многочисленные примеры случаев реализации предельной точки или предельного круга для выражений вида (8) при $n = 1$.

Обобщённые якобиевы матрицы вида J возникают в связи с матричной степенной проблемой моментов (см., напр., [23]) и хорошо изучены. В частности, в работах

[18] - [20] установлены критерии максимальности дефектных чисел и различные признаки реализации случаев максимальности и не максимальности дефектных чисел в терминах элементов матрицы J . Применяв эти признаки и теорему 3, можно получить условия максимальности и не максимальности дефектных чисел оператора L_0 , порождённого выражением (8), в терминах \mathcal{H}_k и d_k . В частности, используя теорему 1 из [20] и теорему 3 данной работы, можно показать, что справедливы следующая теорема и следствие из неё.

Теорема 7. Пусть элементы матрицы J таковы, что

- (a) $\sum_{j=1}^{+\infty} \left(r_{2j+s} \frac{d_{1+s} d_{3+s} \dots d_{2j-1+s}}{d_s d_{2+s} \dots d_{2j-2+s}} \right)^2 < +\infty, \quad s = 1, 2,$
- (b) $\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{d_{1+s} d_{3+s} \dots d_{2j-1+s}}{d_s d_{2+s} \dots d_{2j-2+s}} \right)^2 \| \mathcal{H}_{2j+s-1} + \left(\frac{1}{d_{2j+s-1}} + \frac{1}{d_{2j+s}} \right) I \| < +\infty, \quad s = 1, 2.$

Тогда для оператора L_0 реализуется случай предельного круга.

Следствие 3. Пусть элементы матрицы J таковы, что

- 1) $r_k r_{k+3} d_k d_{k+2} \geq r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}^2$ или $r_k r_{k+3} d_k d_{k+2} \leq r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}^2$ для всех $k = 1, 2, \dots$,
- 2) $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2 < +\infty$,
- 3) $\sum_{k=1}^{+\infty} d_{k+1} \| \mathcal{H}_k + \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}} \right) I \| < +\infty$.

Тогда для выражения оператора L_0 реализуется случай предельного круга.

Теорема 7 и следствие 3 являются обобщениями некоторых результатов из работ [8] и [9].

Список литературы

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Наука, Москва, 1969.
2. Anderson R.L. Limit-point and limit-circle criteria for a class of singular symmetric differential operators // Canad. J. Math., 1976, 28:5, P. 905-914.
3. Лидский В.Б. Limit-point and limit-circle criteria for a class of singular symmetric differential operators О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $-y'' + P(t)y = \lambda y$ // ДАН СССР, 1954, ХСV:2, С. 217-220.
4. Калябин Г.А. О числе решений из $L_2(0, +\infty)$ самосопряжённой системы дифференциальных уравнений второго порядка // Функциональный анализ и его приложения, 1972, 6:3, С. 74-76.

5. Серебряков В.П. О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений типа Штурма-Лиувилля //Дифференциальные уравнения, 1988, 24:10, С. 1732-1738.
6. Серебряков В.П. L^p -свойства решений систем квазидифференциальных уравнений второго порядка и возмущение их коэффициентов на множествах положительной меры //Дифференциальные уравнения, 1999, 35:7, С. 909-917.
7. Серебряков В.П. Об индексе дефекта матричных дифференциальных операторов второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами //Известия высших учебных заведений. Математика, 2000, 3:454, С. 48-53.
8. Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. Сингулярные операторы Штурма -Лиувилля с потенциалом-распределением в пространстве вектор-функций //Доклады РАН, 2011, 441:2, С. 165-168.
9. Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. Сингулярные операторы Штурма -Лиувилля с негладкими потенциалами в пространстве вектор-функций //Уфимский математический журнал, 2011, 3:3, С. 105-119.
10. Бройтигам И.Н., Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. Аналог теоремы Орлова об индексе дефекта для матричных дифференциальных операторов второго порядка //Математические заметки, 2015, 97:2, С. 314-317.
11. Мирзоев К.А. Функция Коши и \mathcal{L}_w^p -свойства решений квазидифференциальных уравнений //Успехи математических наук, 1991, 94:4, С. 161-162.
12. Мирзоев К.А. Операторы Штурма-Лиувилля //Тр. ММО, 2014, 75:2, С. 335-359.
13. Mirzoev K.A. New existence criteria for limit points of Sturm-Liouville operator //Proceedings of the INSTITUTE of MATHEMATICS and MECHANICS National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2014, 40, P. 290-299.
14. Zettl A. Sturm-Liouville theory. AMS, Mathematical Surveys and Monographs, vol.121, 2005.
15. Костенко А.С., Маламуд М.М. Об одномерном операторе Шрёдингера с δ -взаимодействиями //Функциональный анализ и его приложения, 2010, 44:4, С. 87-91.

16. Kostenko A.S., Malamud M.M. 1-D Schrodinger operators with local point interactions on a discrete set //Journal of Differential Equations, 2010, 249, P. 253-304.
17. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. Наукова думка, Киев, 1965.
18. Костюченко А.Г., Мирзоев К.А. Трёхчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределённый случай //Математические заметки, 1998, 63:5, С. 709-716.
19. Костюченко А.Г., Мирзоев К.А. Обобщённые якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами // Функциональный анализ и его приложения, 1999, 33:1, С. 30-45.
20. Костюченко А.Г., Мирзоев К.А. Признаки вполне неопределённости якобиевых матриц с матричными элементами // Функциональный анализ и его приложения, 2001, 35:4, С. 32-37.
21. Christ C.S., Stolz G. Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions // J. Math. Anal. Appl., 1994, 184:3, P. 491-516.
22. Конечная Н.Н. Об асимптотическом интегрировании симметрических квазидифференциальных уравнений второго порядка // Математические заметки, 2011, 90:6, С. 875-884.
23. Крейн М.Г. Бесконечные J - матрицы и матричная проблема моментов // ДАН СССР, 1949, 69, №3, С. 125-128.

Мирзоев К.А.,
 МГУ имени М.В. Ломоносова,
 Ленинские Горы, 1,
 119991, г. Москва, Россия,
 email:mirzoev.karahan@mail.ru

Сафонова Т.А.,
 САФУ имени М.В. Ломоносова,
 Набережная Северной Двины, 17,
 163002, г. Архангельск, Россия,
 email:tanya.strelkova@rambler.ru